E.N.S.I. PHYSIQUE & MECANIQUE 1982

Programme TA **DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** (4 h)

N.B. — 1° *On rappelle que l'usage des calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans aucun document d'accompagnement (notice d'emploi, cartes magnétiques, modules enfichables, etc.) est autorisé.*

2° *Les candidats peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.*

On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et I_n la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A et det (A) le déterminant de A.

Le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne d'une matrice sera noté :

$a_{i,j}$ pour une matrice A

$(BC)_{i,j}$ pour une matrice produit BC

Une matrice $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite tridiagonale si et seulement si :

$$\forall i \notin \{j-1, j, j+1\} \qquad t_{i,j} = 0$$

Le but du problème est de montrer sur un exemple qu'une matrice symétrique réelle A est semblable à une matrice tridiagonale symétrique réelle T et de trouver les valeurs propres et vecteurs propres de A à partir des valeurs propres et vecteurs propres de T.

I. PROPRIETES DES MATRICES ORTHOGONALES

On dit qu'une matrice $R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tRR = I_n$

1° Soit R une matrice orthogonale. Calculer det (R). Montrer que R est inversible et exprimer R^{-1} à l'aide de R.

2° *a.* $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ désignant les vecteurs colonnes d'une matrice $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer ${}^tQQ$ à l'aide des produits scalaires $\vec{V}_i \cdot \vec{V}_j$ (en supposant $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne habituelle).

b. Montrer que Q est orthogonale si et seulement si le système $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n)$ est orthonormé.

3° Montrer que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et si $R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors $R^{-1}AR$ est symétrique.

4° Montrer que le produit de deux matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.

II. EXEMPLE NUMERIQUE

1° On considère dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0 & -0{,}7 \\ 0{,}7 & -4 & -1 & -1{,}6 \\ 0 & -1 & 2 & 0{,}8 \\ -0{,}7 & -1{,}6 & 0{,}8 & -1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

a. Quelle condition doivent vérifier c et s pour que R soit orthogonale?

b. Pour $B \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$, calculer $({}^tRB)_{4,1}$ et en déduire la valeur de $({}^tRAR)_{4,1}$ en fonction de c et s.

2° Déterminer c et s pour que R soit orthogonale et que $({}^tRAR)_{4,1} = 0$.

On choisira $s < 0$. Calculer alors la matrice $A_1 = {}^tRAR$

3° Soit dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice :

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' & s' \\ 0 & 0 & -s' & c' \end{pmatrix}$$

.../...

a. Calculer $({}^tR'A_1R')_{1,2}$ en fonction de c' et s'.

b. Déterminer c' et s' pour que R' soit orthogonale et que $({}^tR'A_1R')_{1,2} = 0$. On choisira $s' < 0$.

4° Calculer alors $A_2 = {}^tR'A_1R'$ (on utilisera une calculatrice et on ne conservera que 3 décimales dans le résultat final).

5° Si V est un vecteur propre de A_2 associé à une valeur propre λ, montrer que λ est valeur propre de A et préciser un vecteur propre associé.

III. ETUDE DU POLYNOME CARACTERISTIQUE D'UNE MATRICE TRIDIAGONALE SYMETRIQUE

Soit $T_n \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tridiagonale symétrique. On pose :

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad t_{i,i} = a_i$$
$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \qquad t_{i+1,i} = t_{i,i+1} = b_i$$

Soit $P_n(\lambda) = \det(T_n - \lambda I_n)$ le polynôme caractéristique de T_n.

1° Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. On considère dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices C et D définies par :

$$\begin{cases} c_{i,j} = u_{i,j} & \text{si } i \leqslant k \text{ et } j \leqslant k \\ c_{i,i} = 1 & \text{si } k+1 \leqslant i \leqslant n \\ c_{i,j} = 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{i,j} = u_{i,j} & \text{si } i \geqslant k+1 \text{ et } j \geqslant k+1 \\ d_{i,i} = 1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k \\ d_{i,j} = 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Calculer le coefficient $m_{i,j}$ de la matrice $M = CD$ dans chacun des 4 cas suivants :

$$i \leqslant k \text{ et } j \leqslant k$$
$$i \leqslant k \text{ et } j > k$$
$$i > k \text{ et } j \leqslant k$$
$$i > k \text{ et } j > k$$

En déduire que le déterminant de M s'exprime à l'aide des déterminants de deux matrices d'ordres inférieurs à n et préciser ces matrices.

2° On suppose dans cette question qu'il existe $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tel que $b_k = 0$. Montrer que le polynôme P_n est le produit de P_k par le polynôme caractéristique d'une matrice à préciser.

Dans toute la suite, on suppose que $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\ b_k \neq 0$

3° Déterminer P_1 et P_2 puis établir pour $n \geqslant 3$ la relation de récurrence donnant P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2}.

4° Soit λ une valeur propre de T_n

a. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$

b. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre λ et préciser sa dimension.

c. En déduire que les valeurs propres de T_n sont toutes distinctes.

5° Pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on note $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_i^{(i)}$ les racines du polynôme P_i avec $x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \ldots < x_i^{(i)}$. Préciser $x_1^{(1)}$ puis montrer, sans calculer $x_1^{(2)}$ et $x_2^{(2)}$, que :

$$x_1^{(2)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)}$$

.../...

6° En utilisant la relation de récurrence du 3°, calculer $P_3\left(x_j^{(2)}\right)$ pour $j = 1$ et $j = 2$. En déduire que :

$$x_1^{(3)} < x_1^{(2)} < x_2^{(3)} < x_2^{(2)} < x_3^{(3)}$$

7° Plus généralement, montrer que pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$

$$x_1^{(k)} < x_1^{(k-1)} < x_2^{(k)} < \ldots < x_{k-1}^{(k)} < x_{k-1}^{(k-1)} < x_k^{(k)}$$

8° Soit $V = (v_1, \ldots, v_n)$ un vecteur propre d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associé à la valeur propre λ et soit k un indice tel que :

$$|\lambda - a_{k,k}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j=n}} |a_{k,j}|$$

et

$$|\lambda| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{j=n} |a_{i,j}| \right)$$

b. En déduire que toutes les valeurs propres de T_n appartiennent à l'intervalle $[-c_n, +c_n]$ avec :

$$c_n = \max \left[|a_1| + |b_1|, |a_n| + |b_{n-1}|, \max_{2 \leqslant i \leqslant n-1} (|a_i| + |b_i| + |b_{i-1}|) \right]$$

IV. CALCUL D'UNE VALEUR PROPRE D'UNE MATRICE TRIDIAGONALE SYMETRIQUE

Dans cette partie, on reprend les notations du III et on choisit $n = 4$ avec :

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}99 & 0 & 0 \\ -0{,}99 & -0{,}9 & -1{,}967 & 0 \\ 0 & -1{,}967 & -1{,}686 & 2{,}986 \\ 0 & 0 & 2{,}986 & -0{,}414 \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite, pour calculer $P_4(\lambda)$, on calculera successivement, à l'aide de III.3°, *les valeurs de $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, $P_3(\lambda)$, $P_4(\lambda)$ et on donnera ces résultats dans la copie. Il n'y a donc pas lieu de déterminer les coefficients des polynômes P_3 et P_4.*

1° En admettant que $x_1^{(3)} = -3{,}39162$ déduire de III.7° et III.8° un premier encadrement $[\alpha_1, \beta_1]$ de $x_1^{(4)}$. Préciser sans calcul les signes de $P_4(\alpha_1)$ et $P_4(\beta_1)$.

2° Calculer $P_4\left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\right)$ et en déduire un encadrement $[\alpha_2, \beta_2]$ de $x_1^{(4)}$ en remplaçant l'intervalle $[\alpha_1, \beta_1]$ par celui des deux intervalles $\left[\alpha_1, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\right]$ ou $\left[\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_1\right]$ qui contient $x_1^{(4)}$.

Utiliser encore trois fois cette méthode pour obtenir successivement des encadrements $[\alpha_3, \beta_3]$, $[\alpha_4, \beta_4]$ et $[\alpha_5, \beta_5]$ de $x_1^{(4)}$.

3° Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ s'annulant une seule fois sur $[\alpha, \beta]$. Déterminer une valeur approchée du zéro de f par interpolation linéaire, c'est-à-dire en remplaçant sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ la courbe représentative de f par la corde.

4° Trouver une valeur approchée de $x_1^{(4)}$ en utilisant la méthode de la question précédente à partir de l'encadrement $[\alpha_5, \beta_5]$.

5° En prenant comme valeur de $x_1^{(4)}$ la valeur approchée obtenue à la question précédente, trouver un vecteur propre de T_4 associé et en déduire un vecteur propre W de la matrice A du II. associé à $x_1^{(4)}$ (on choisira des vecteurs propres de première composante égale à 1).

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail